1041微積分乙期末考試題及詳解

1. 令$f\left(x\right)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{1}{1+t^4}dt$且$F\left(x\right)=xe^{f(x)}$。

   (a) 求$f'\left(x\right)$。

   (b) 求$F'\left(1\right)$。

   解題訣竅：利用微積分基本定理與連鎖律。

   Solution:

   (a) 設$g\left(x\right)=\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^4}dt$，而$h\left(x\right)=x^2$，因此有

   $$f\left(x\right)=g\left(h\left(x\right)\right)-g\left(x\right)$$

   因此利用微積分基本定理與連鎖律可得

   $$\begin{aligned}f'\left(x\right)=&g'\left(h\left(x\right)\right)h'\left(x\right)-g'\left(x\right)\\=&\frac{1}{1+\left(x^2\right)^4}\cdot 2x-\frac{1}{1+x^4}\\=&\frac{2x}{1+x^8}-\frac{1}{1+x^4}\end{aligned}$$

   (b) 利用連鎖律微分可得

   $$F'\left(x\right)=e^{f(x)}+xe^{f(x)}\cdot f'\left(x\right)$$

   取$x=1$代入後有

   $$\begin{aligned}F'\left(1\right)=&e^{f(1)}+1\cdot e^{f(1)}\cdot f'\left(1\right)\\=&e^0+1\cdot e^0\cdot f'\left(1\right)\\=&\frac{3}{2}\end{aligned}$$

   □

2. 令$F\left(x\right)=\displaystyle\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$。求$F\left(x\right)$在$x=0$的泰勒展開式並寫出一般項。

   Solution: 我們已知

   $$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

   因此取$-t^2$取代原先的x可得

   $$e^{-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-t^2\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k t^{2k}}{k!}$$

因此取積分可得

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt \\
&= \sum_{k=0}^{x} \int_0^x \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!(2k+1)} \Bigg|_0^x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}
\end{aligned}
$$

□

3. 計算積分值：$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$。

Solution: 此定積分將分母配方法後可得

$$
\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx
$$

由此令$x+1=2\sin\theta$，如此有

- 當$x=0$時有$\theta=\dfrac{\pi}{6}$；
- 當$x=-1$時有$\theta=0$；
- $dx=2\cos\theta d\theta$

據此可將原本的定積分改寫並計算如下

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\theta-1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&=2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

□

4. 求積分值：$\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+x^2-1}{x^3+x} dx$。

解題訣竅：要留意常見關於對數函數的微分，如

- $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Solution: 首先可將被積分函數改寫如下

$$\frac{x^4+x^2-1}{x^3+x}=\frac{x\left(x^3+x\right)-1}{x^3+x}=x-\frac{1}{x^3+x}=x-\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=x-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

因此所求的定積分可以計算如下

$$\begin{aligned}
&\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx\\
=&\frac{x^2}{2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2\\
=&\left(2-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5\right)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2\right)\\
=&\frac{3}{2}-\frac{3\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{2}
\end{aligned}$$

□

5. 求極限值：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x$。

Solution: 由於底數與指數都與x有關，因此我們利用換底公式改寫：$\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x=\exp\left[x\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)\right]$。由此我們知所求的極限爲

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\exp\left[x\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)\right]$$

故我們僅需先計算$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)$，可以檢查此爲$\infty\cdot 0$型的極限，可以改寫後使用羅畢達法則如下

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\cos\frac{3}{x}\cdot-\frac{3}{x^2}}{1+\sin\frac{3}{x}}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cos\frac{3}{x}}{1+\sin\frac{3}{x}}=3$$

因此題目所求爲e^3。

□

6. 求由曲線$x^4-x^2-y^2=0$和$x=2$所圍成區域的面積。

Solution: 由於曲線可以寫爲$y^2=x^2\left(x^2-1\right)$，爲了要使$y$能夠計算，$x$的範圍必須在$(1,\infty)$或$(-\infty,-1)$。但題目欲求與$x=2$所夾的區域面積，明確的說爲$x=2$與$y=\sqrt{x^4-x^2}$、$y=-\sqrt{x^4-x^2}$所夾的區域面積，因此列式並計算如下：

$$\int_1^2\sqrt{x^4-x^2}-\left(-\sqrt{x^4-x^2}\right)dx=2\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}dx$$

令$t=x^2-1$，則有

- 當$x=1$時有$t=0$；
- 當$x=2$時有$t=3$；
- $dt=2xdx$。

據此我們可得將定積分改寫如下並計算

$$\int_0^3 \sqrt{t}dt = \left.\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^3 = 2\sqrt{3}$$

□

7. 設R爲$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，$y=0$及$0\leq x\leq 1$所圍成的區域。

   (a) 求R繞x軸旋轉所產生之體積。

   (b) 求R繞y軸旋轉所產生之體積。

解題訣竅：當題目給$y=f(x)$時，

(a) 繞x軸的旋轉體體積公式爲$\int \pi f^2(x)\,dx$；

(b) 繞y軸的旋轉體體積公式爲$\int 2\pi x f(x)\,dx$。

Solution:

(a) 利用公式計算如下

$$\int_0^1 \pi\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \pi\int_0^1 \frac{1+\cos(\pi x)}{2}dx = \left.\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\sin(\pi x)}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(b) 利用公式列式如下

$$\int_0^1 2\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 2\pi\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

利用分部積分法有

$$\begin{aligned}
&2\pi\left[\left.\left(\frac{2x}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right]\\
=&4-4\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\\
=&4+\left.\left(\frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right|_0^1\\
=&4-\frac{8}{\pi}
\end{aligned}$$

□

8. 求曲線$y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，由$x=-1$到$x=1$之長度。

解題訣竅：弧長公式爲$\int\sqrt{1+y'^{2}}dx$

Solution: 列式並計算如下

$$
\begin{aligned}
s&=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^{2}}dx\\
&=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^{2}}dx\\
&=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}dx\\
&=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}dx\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx\\
&=\left.\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right|_{-1}^{1}\\
&=\frac{e-e^{-1}}{2}-\frac{e^{-1}-e}{2}\\
&=e-e^{-1}
\end{aligned}
$$

□