1042微積分乙期末考試題及詳解

1. 解微分方程$\begin{cases} y' + (\tan t)\, y = t \sin 2t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

   Solution: 本題的解題關鍵在積分因子法。 首先計算積分因子爲

$$\mu = e^{\int_0^t \tan s ds} = e^{-\ln \cos t} = \sec t$$

   因此對原微分方程同乘以$\sec t$可得

$$(\sec t)\, y' + (\tan t \sec t)\, y = 2t \sin t$$

   亦即

$$[(\sec t)\, y(t)]' = 2t \sin t$$

   利用微積分基本定理有

$$(\sec t)\, y(t) - (\sec 0)\, y(0) = \int_0^t 2s \sin s ds = -2t \cos t + 2 \sin t$$

   從而解得

$$y(t) = \frac{-2t \cos t + 2 \sin t + 1}{\sec t} = -2t \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos t$$

   □

2. 解微分方程$\dfrac{dy}{dx} = e^y \sin x$。

   Solution: 利用分離變數法移項後直接取不定積分計算之。

$$\begin{aligned} & e^{-y} dy = \sin x dx \\ \Rightarrow \quad & \int e^{-y} dy = \int \sin x dx \\ \Rightarrow \quad & -e^{-y} = -\cos x - C \\ \Rightarrow \quad & y = \ln |\cos x + C| \end{aligned}$$

   其中C爲積分常數。 □

3. 某一化學反應爲考慮物質 P 的分子與物質 Q 的分子之間的碰撞，產生一新的物質 X，即 P+Q→X。若$p, q, (p \neq q)$分別爲物質 P 與 Q 的初始濃度，$x(t)$爲物質 X 在t時間的濃度，則$p - x(t)$與$q - x(t)$分別爲 P 與 Q 在t時間的濃度。此化學反應遵守以下微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \alpha (p - x)(q - x),$$

其中α爲大於零的常數。若$x(0)=0$, 求解$x(t)$.

Solution: 運用分離變數法求解，其中應留意使用部分分式。

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{(p-x)(q-x)}=\alpha dt\\
\Rightarrow\quad &\int\frac{dx}{(p-x)(q-x)}=\alpha t+C\\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{q-p}\int\left(\frac{1}{p-x}-\frac{1}{q-x}\right)dx=\alpha t+C\\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{q-p}\left[-\ln(p-x)+\ln(q-x)\right]=\alpha t+C\\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{q-p}\ln\left(\frac{q-x}{p-x}\right)=\alpha t+C
\end{aligned}$$

此爲所求的函數，其中C爲待定常數。我們取$t=0$，且由$x(0)=0$可得$C=\frac{1}{q-p}\ln\frac{q}{p}$，如此所求的函數可以表達並整理如下

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q-p}\ln\left(\frac{q-x}{p-x}\right)=\alpha t+\frac{1}{q-p}\ln\frac{q}{p}\\
\Rightarrow\quad &\ln\left(\frac{q-x}{p-x}\right)=\alpha(q-p)t+\ln\frac{q}{p}\\
\Rightarrow\quad &\frac{q-x}{p-x}=\frac{q}{p}e^{\alpha(q-p)t}\\
\Rightarrow\quad &x(t)=\frac{pq-pqe^{\alpha(q-p)t}}{p-qe^{\alpha(q-p)t}}
\end{aligned}$$

□

4. 若X爲一隨機變數，X在$\{1,2\}$取值且$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$。

   (a) 求$P(X=1)$及$P(X=2)$。

   (b) 求$\mathrm{Var}(X)$。

Solution:

(a) 我們可以製作他的隨機變數對應的機率表格如下。

k	1	2
$P(X=k)$	p	$1-p$

按期望值的定義有$\mathrm{E}(X)=1\cdot p+2\cdot(1-p)=\frac{5}{3}$，因此$p=\frac{1}{3}$。

(b) 我們沿用上表可得此表可得

$(k-\mathrm{E}(X))^2$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

按變異數的定義$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X))^2\right]=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$\square$

5. 求$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2bx+c}dx$，$b, c \in \mathbb{R}$。(可用$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$。)

Solution: 利用配方法，我們有$-x^2+2bx+c = -(x-b)^2 + b^2 + c$，從而

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2bx+c}dx = e^{b^2+c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-b)^2}dx$$

利用變數代換，令$t = x - b$，有$dt = dx$且上下界沒有變化，因此積分值爲$\sqrt{\pi}$，因此所求的瑕積分爲$e^{b^2+c}\sqrt{\pi}$。 $\square$

6. 令X, Y爲兩個隨機變數，$f_X(t) = e^{-t}, t \geq 0$且$Y = 2X+1$。求$f_Y(t)$。

Solution: 爲了求機率密度函數$f_Y(t)$，我們應求累積機率函數$F_Y(t)$後求導。按$F_Y(t)$的定義計算如下

$$\begin{aligned}
F_Y(t) =& P(Y \leq t) \\
=& P(2X+1 \leq t) \\
=& P\left(X \leq \frac{t-1}{2}\right) \\
=& \int_0^{\frac{t-1}{2}} e^{-s}ds \\
=& 1 - e^{\frac{1-t}{2}}, \text{ 此處} t \geq 1
\end{aligned}$$

因此$f_Y(T) = F_Y'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1-t}{2}}$，其中$t \geq 1$。 $\square$

7. 若機率密度函數$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$且隨機變數X, Y獨立。令$W = (X+Y)^2$，求W的機率密度函數$f_W(t)$。

解題訣竅：先計算分配函數F_W後再利用關係式$f_W = F_W'$求解。

Solution: 先考慮$Z = X+Y$，由於X、Y爲獨立變數，因此由教科書中的定理知

$$\begin{aligned}
f_Z(z) =& \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\, dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}e^{-(z-t)^2}dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2-2zt-2t^2}dt \\
=& \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(t-\frac{z}{2}\right)^2}dt \\
=& \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
=& \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

現在知$W=Z^2$，此外可以容易注意到當$w<0$時，$W=w$是不可能的，因此$P(W=w)=0$。而當$w\geq 0$時，則有

$$\begin{aligned}F_W(w)=&\mathrm{P}(W\leq w)\\=&\mathrm{P}\left(Z^2\leq w\right)\\=&\mathrm{P}\left(-\sqrt{w}\leq Z\leq\sqrt{w}\right)\\=&\mathrm{P}\left(Z\leq\sqrt{w}\right)-\mathrm{P}\left(Z<-\sqrt{w}\right)\\=&\int_{-\infty}^{\sqrt{w}}f_Z(t)\,dt-\int_{-\infty}^{-\sqrt{w}}f_Z(t)\,dt\end{aligned}$$

因此利用微積分基本定理可得

$$f_W(w)=F_W'(w)=f_Z\left(\sqrt{w}\right)\frac{1}{2\sqrt{w}}+f_Z\left(-\sqrt{w}\right)\frac{1}{2\sqrt{w}}=\frac{e^{-\frac{w}{2}}}{\sqrt{2\pi w}}$$

□

8. 某公司之電話通數平均每小時20通，求在3分鐘內至少有一通電話之機率。（假設此隨機現象遵守Poisson過程）

Solution: 按題意所述，我們假設k爲獲得電話通數，其Poisson機率如下

$$\mathrm{P}(k)=\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

其中m代表的是給定的時間中的平均通數。由於平均每小時20通，因此平均3分鐘內有1通，故$m=1$。至少有一通的機率爲

$$\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots$$

這樣需要計算無窮多次，因此我們反向思考如下（所有的機率去扣掉0通電話的機率）

$$1-P(0)=1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}=1-e^{-1}$$

□

9. 某城市中的電話通話時間長短不一，若隨機變數X爲電話的通話長度，其機率密度函數爲

$$f_X(t)=\frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}t},\ t>0$$

其中t以分鐘爲單位表示一個隨機電話的通話長度。

(a) 求電話通話長度在一分鐘以內的機率爲何？
(b) 求電話通話長度大於一分鐘不滿兩分鐘的機率爲何？
(c) 求電話通話長度超過三分鐘的機率爲何？
(d) 求一通電話的平均通話長度是多少？

Solution: 按題意分別求下列的積分值：

(a) $P(0<X<1)=\int_0^1 \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt=-e^{-\frac{2t}{5}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{2}{5}}$。

(b) $P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt=-e^{-\frac{2t}{5}}\Big|_1^2=e^{-\frac{2}{5}}-e^{-\frac{4}{5}}$。

(c) $P(X>3)=\int_3^\infty \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt=-e^{-\frac{2t}{5}}\Big|_3^\infty=e^{-\frac{6}{5}}$。

(d) 平均通話長度的數學表示即爲期望值，因此計算下列積分

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^\infty tf_X(t)\,dt=\int_0^\infty \frac{2t}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt=-te^{-\frac{2t}{5}}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{5}}dt=-\frac{5}{2}e^{-\frac{2t}{5}}\Big|_0^\infty=\frac{5}{2}$$

□