1001微積分乙期末考試題及詳解

1. 令$f\left(x\right)=\displaystyle\int_{x^2}^{\tan^{-1}x}\frac{dt}{1+t^7}$。求$f'\left(x\right)$。
   解題訣竅：熟悉微積分基本定理與連鎖法則。
   Solution: 設$g\left(x\right)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^7}$，則
$$f\left(x\right)=g\left(\tan^{-1}x\right)-g\left(x^2\right)$$
   因此由微積分基本定理與連鎖律可得
$$\begin{aligned}f'\left(x\right)=&g'\left(\tan^{-1}x\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}-g'\left(x^2\right)\cdot 2x\\=&\frac{1}{1+\left(\tan^{-1}x\right)^7}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^{14}}\end{aligned}$$
$\square$

2. 求$\displaystyle\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3dx$。
   解題訣竅：利用三角變換求解。
   Solution: 令$x=\sin\theta$，則$dx=\cos\theta d\theta$，從而有
$$\begin{aligned}\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3dx=&\int\cos^4\theta d\theta\\=&\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta\\=&\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta\\=&\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta\\=&\int\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)d\theta\\=&\frac{3\theta}{8}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}+C\\=&\frac{3\theta}{8}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}+\frac{\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta}{8}+C\\=&\frac{3\sin^{-1}x}{8}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{x\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{8}+C\\=&\frac{3}{8}\sin^{-1}x+\frac{x\left(5-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{8}\end{aligned}$$
$\square$

3. (a) 求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$。

(b) 求 $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3}dx$。

Solution:

(a) 由於 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)+C$，因此所求為

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

(b) 利用部分分式法有

$$\frac{x}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{1-x+x^2}$$

因此所求為

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^3}dx &= -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}\\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

其中C為積分常數。

□

4. 設A為$y=\sin 2x$, $y=0$及$x=\frac{\pi}{2}$所圍成的區域。求A對y軸旋轉所得到的體積。

解題訣竅：利用繞y軸的旋轉體體積公式$\displaystyle\int 2\pi x f(x)\,dx$求解。

Solution: 由題意列式並計算如下：

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x)\,dx\\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(-\cos 2x)\\ &= \pi\left[-x\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx\right]\\ &= \frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi\sin 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

□

5. 求$y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$, $1\le x\le 2$的曲線長度。

解題訣竅：運用曲線弧長公式$\int\sqrt{1+y'^2}dx$求解。

Solution: 列式並計算如下：

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx \\
&= \frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{8}{6}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}$$

□

6. (a) 求$\sin x$在$x=0$的7次泰勒多項式及餘項。

(b) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}{x^7}$。

Solution:

(a) 根據泰勒餘項定理有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{7}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}x^8$$

其中ξ介在0與x之間。 現在設$f(x)=\sin x$，則有

- $f^{(0)}(x)=f^{(4)}(x)=f^{(8)}(x)=\sin x$；
- $f^{(1)}(x)=f^{(5)}(x)=\cos x$；
- $f^{(2)}(x)=f^{(6)}(x)=-\sin x$；
- $f^{(3)}(x)=f^{(7)}(x)=-\cos x$；

因此

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{\sin\xi}{8!}x^8$$

故7次泰勒多項式爲$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$，餘項爲$\frac{\sin\xi}{8!}x^8$。

(b) 將(a)的結果代入極限式中可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}{x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^7}{7!}+\frac{\sin\xi}{8!}x^8}{x^7}=-\frac{1}{7!}=-\frac{1}{5040}$$

□

7. 利用$\sqrt{\frac{81}{121}\times\frac{80}{81}}=\frac{4}{11}\sqrt{5}$來求$\sqrt{5}$的近似值，使誤差$<10^{-4}$。

Solution: 利用題目敘述，我們有

$$\sqrt{5}=\frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}$$

考慮函數$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$，利用二項式定理有其泰勒展開式爲

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{\frac{1}{2}}x^k=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}x^k$$

故

$$\sqrt{5}=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{162}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!81^k}\right)$$

由於當$k=2$時，誤差爲

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{2!}{2^3\cdot 1!\cdot 2!\cdot 81^2}=\frac{1}{23328}<\frac{1}{10000}=10^{-4}$$

因此$\sqrt{5}$的近似值爲

$$\sqrt{5}\simeq\frac{9}{4}-\frac{1}{72}=\frac{161}{72}$$

□

8. 求$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^{\cos x}$。（”左極限”$x\to\frac{\pi}{2}^-$意指$x<\frac{\pi}{2}$，$x$趨近於$\frac{\pi}{2}$。

解題訣竅：利用換底公式與羅必達法則。

Solution: 由於換底公式可得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\exp\left[(\cos x)\cdot\ln\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right]=\exp\left[-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

爲了簡化計算，我們令$h=\frac{\pi}{2}-x$，則$h\to 0^+$且$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\sin h$，從而所求的極限可以改寫如下

$$\exp\left[-\lim_{h\to 0^+}(\sin h)\cdot\ln h\right]$$

其中$\sin h$趨近於0，而$\ln h$趨近於$-\infty$，因此可以嘗試使用羅必達法則求解：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln h}{\csc h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{-\cot h\csc h}=-\lim_{h\to 0^+}\frac{\tan h\sin h}{h}=0$$

故所求爲$\exp(0)=e^0=1$。