1001微積分乙期中考試題及詳解

1. 計算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$。

   解題訣竅：留意到重要的極限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

   Solution: 由於所求可以改寫如下

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$

   因此我們令$h=-\frac{2}{x+1}$，因此當$x\to\infty$時$h\to 0$，故有

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{-1-\frac{2}{h}}=\left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{-2}\cdot\lim_{h\to 0}(1+h)^{-1}=e^{-2}$$

   □

2. 令$f(x)=x^{\ln x}$。求$f'(x)$。

   解題訣竅：利用換底公式$a^b=e^{b\ln a}$與連鎖律解題。

   Solution: 由於$f(x)=x^{\ln x}=e^{(\ln x)^2}$，因此

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{(\ln x)^2}\cdot\left[(\ln x)^2\right]'\\&=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\\&=\frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}\end{aligned}$$

   □

3. 令$f(x)=\tan^{-1}(\sqrt{x})\cdot\tan(x^2)$。求$f'(x)$。

   Solution: 運用連鎖律與乘法微分公式如下

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\tan^{-1}(\sqrt{x})\right)'\tan(x^2)+\tan^{-1}(\sqrt{x})\left(\tan(x^2)\right)'\\&=\left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\cdot\tan(x^2)+\tan^{-1}(\sqrt{x})\cdot\left[\sec^2(x^2)\cdot 2x\right]\\&=\frac{\tan(x^2)}{2\sqrt{x}(1+x)}+2x\tan^{-1}(\sqrt{x})\sec^2(x^2)\end{aligned}$$

   □

4. 說明$f(x)=4x^3+2x^2+4x+1$和$g(x)=2x^2+\cos(x)$僅有一個交點。

   Solution: 為了說明這兩個函數僅有一個交點，我們僅需說明方程組$\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}$僅有一解，亦即說明$f(x)=g(x)$僅有一解。

   為此我們令$F(x)=f(x)-g(x)$，即$F(x)=4x^3+4x+1-\cos(x)$。由於

$$F'(x)=12x^2+4+\sin(x)\geq 12x^2+3\geq 3>0$$

   故F嚴格遞增，又$F(0)=0$，因此f與g有且僅有一個交點。 □

5. 假設$y^3+xy-x=1$。

(a) 求過點$(1,1)$之切線方程式。

(b) 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$在點$(1,1)$之值。

Solution:

(a) 利用隱函數微分法有

$$3y^2\frac{dy}{dx}+\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-1=0 \tag{1}$$

取$x=1$與$y=1$代入後有

$$3\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}+\left(1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}\right)-1=0$$

故$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}=0$。因此切線方程式爲

$$y-1=0\,(x-1)$$

即爲$y=1$。

(b) 對(1)再做一次隱函數微分，如此有

$$\left[6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y^2\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\left(2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

取$x=1$、$y=1$與$\dfrac{dy}{dx}=0$代入可得

$$4\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x,y)=(1,1)}=0$$

故$\dfrac{d^2y}{dx^2}$在$(x,y)=(1,1)$的值爲0。

□

6. 利用線性逼近去估計$\ln 0.97$之值。
Solution: 設$f(x)=\ln x$，利用線性逼近法有

$$f(0.97)\simeq f(1)+f'(1)(0.97-1)$$

即

$$\ln(0.97)\simeq\ln(1)+\frac{1}{1}\cdot(-0.03)=-0.03$$

□

7. 若$y=f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$。

(a) $y=f(x)$在$\underline{\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2},\infty\right)}$(區間)遞增。

$y=f(x)$在$\underline{(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)}$(區間)遞減。

(b) $y=f(x)$之極大值(若存在的話)：__無__(座標)。

$y=f(x)$之極小值(若存在的話)：$\underline{\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2},\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)}$(座標)。

(c) $y=f(x)$在$\underline{(-\infty,-1)\cup(0,\infty)}$(區間)凹向上。

$y=f(x)$在$\underline{(-1,0)}$(區間)凹向下。

(d) $y=f(x)$所有的漸近線爲$\underline{x=0}$。

(e) 畫出$y=f(x)$之圖形。

Solution:

(a) 爲了找出遞增區間，我們僅需解不等式$f'(x)>0$，即

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}>0$$

同乘以x^2後有$2x^3-1>0$，即$x>\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$，寫爲區間的形式則爲$\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2},\infty\right)$；反之其餘部分就是遞減區間，但應注意0不屬於定義域，因此$x<\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$但$x\neq 0$爲遞減區間，區間的形式爲$(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$。

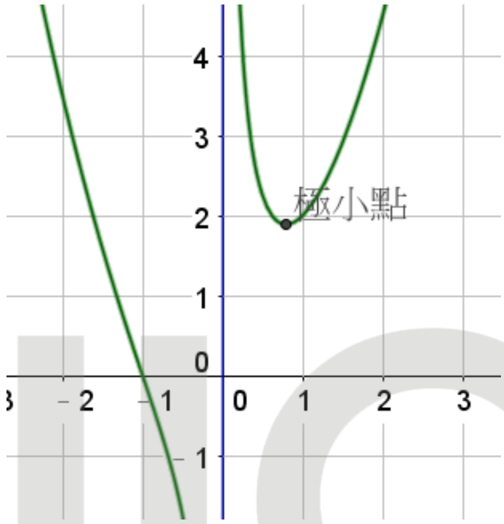
(b) 爲了找出極值，我們僅需解$f'(x)=0$，由(a)可得$x=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$。爲了判斷爲極大或極小值，我們運用二階導函數來判斷之。由於$f''(x)=2+\dfrac{2}{x^3}$，因此$f''\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=6>0$，因此在$x=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$發生極小值，座標爲$\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2},\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$。

(c) 爲了找出凹口向上的區間，我們僅需解不等式$f''(x)>0$，即$2+\dfrac{2}{x^3}>0$，同乘x^4並除以2可得$x^4+x>0$，即$x(x+1)(x^2-x+1)$，可得$x>0$或$x<-1$，表達爲區間的形式即爲$(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$；反之其餘的區間即爲凹口向下，亦即$(-1,0)$爲凹口向下的區間。

(d)
- 由於 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$，因此不存在水平漸近線。
- 由於 $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$，因此$x = 0$爲鉛直漸近線。
- 又 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$，因此不存在斜漸近線。

總結而言，只有$x = 0$爲漸近線。

(e) 作圖如下：



$\square$

8. 若高鐵每月載客量爲40,000人，票價爲1,500元/人。高鐵公司希望調整票價，增加收益。若票價每調高10元，則會損失乘客200人。請問該如何調整票價，才能達到最大的收益？

Solution: 設調高x元，則會損失乘客$20x$人，因此總收益爲

$$f(x) = (1500 + x)(40000 - 20x) = -20(x + 1500)(x - 2000)$$

(方法一) 利用配方法有

$$f(x) = -20(x - 250)^2 + 61250000$$

故當$x = 250$時有最大值，因此調高250元會有最大收益。

(方法二) 利用$f'(x) = -40x + 10000 = 0$可解得$x = 250$；又$f''(x) = -40 < 0$，因此在$x = 250$處達到極大值，因此要調高250元才有最大收益。

$\square$