1002微積分乙期末考試題及詳解

1. 解微分方程$x\dfrac{dy}{dx}=-2y+\sin x$，$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$。
   解題訣竅：利用積分因子法。
   Solution: 整理並移項可得

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}$$

如此積分因子爲

$$\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$$

因此兩邊同乘以x^2可得

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y\right)=x^2\frac{dy}{dx}+2xy=x\sin x$$

兩邊同取定積分，其積分範圍爲$\dfrac{\pi}{2}$到x：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{d}{dt}\left(t^2y\right)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}t\sin t dt$$

利用分部積分法可得

$$x^2y=-x\cos x+\sin x-1$$

因此移項後解得

$$y\left(x\right)=\frac{-x\cos x+\sin x-1}{x^2}$$

□

2. 設某地區人口的生長率和死亡率分別爲α, β（$\alpha < \beta$）且外移人口數爲$m(> 0)$，假設α, β, m皆爲常數。若整個人口數在時間t的變化率滿足$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta) P - m$。

(a) 求滿足初始條件$P(0) = P_0$的$P(t)$

(b) 問什麼時候人口會增加、停滯或減少？(Hint: 利用(a)所求出的$P(t)$)

(c) 若在1847年時，該地區有人口800萬，$\alpha - \beta = 1.6\%$, $m = 210,000$。問在1850年時人口是增加、停滯或減少？

解題訣竅：利用分離變數法。

Solution:

(a) 將原本的微分方程式移項後有

$$\frac{dP}{(\alpha - \beta) P - m} = dt$$

兩邊同乘$\alpha - \beta$後取定積分，積分範圍爲0至x可得

$$\ln [(\alpha - \beta) P - m] - \ln [(\alpha - \beta) P_0 - m] = (\alpha - \beta) t$$

兩邊同取自然指數後有

$$\frac{(\alpha - \beta) P - m}{(\alpha - \beta) P_0 - m} = e^{(\alpha - \beta)t}$$

整理有

$$P = \frac{m}{\alpha - \beta} + \left(P_0 - \frac{m}{\alpha - \beta}\right) e^{(\alpha - \beta)t}$$

(b) 由(a)代回原本的微分方程式可知

$$\frac{dP}{dt} = [(\alpha - \beta) P_0 - m] e^{(\alpha - \beta)x}$$

因此

- 當$P_0 > \frac{m}{\alpha - \beta}$時人口增加；
- 當$P_0 = \frac{m}{\alpha - \beta}$時人口停滯；
- 當$P_0 < \frac{m}{\alpha - \beta}$時人口減少；

(c) 根據題意可知

$$\frac{m}{\alpha - \beta} = \frac{210000}{0.016} = 13125000 > 8000000 = P_0$$

因此人口減少。

□

3. 若X_1, X_2爲白努利單次試驗，X_1, X_2取值1的機率爲$\frac{1}{4}$；X_1, X_2取值0的機率爲$\frac{3}{4}$且X_1, X_2獨立。令$Y = X_1 + X_2$，

(1) $P(Y=1), P(Y=2)$

(2) Y和X_1是否獨立？

Solution:

(1) 根據機率的意義與題目給定的獨立可以計算如下

$$
\begin{aligned}
P(Y=1) =& P(X_1 + X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1) P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) P(X_2 = 1) \\
=& \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
=& \frac{3}{8} \\
P(Y=2) =& P(X_1 + X_2 = 2) \\
=& P(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1) P(X_2 = 1) \\
=& \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
=& \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

(2) X_1與Y獨立的條件爲對所有可能的a與b恆有$P(Y=a, X_1=b) = P(Y=a) P(X_1=b)$。但當$a=2$、$b=0$時有

$$P(Y=2, X_1=0) = P(X_1=0, X_2=2) = 0$$

以及

$$P(Y=2) P(X_1=0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

由於兩者不相等，因此Y與X_1不獨立。

□

4. 已知$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$瑕積分存在，求其值。（假設$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。）

解題訣竅：利用分部積分法將所求的瑕積分化爲已知的積分。

Solution: 根據分部積分法可得

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx =& -\frac{x}{2} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
=& \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\
=& \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

5. 血管阻塞的時間T爲一隨機變數，取值在1秒到30秒之間，設其機率密度函數爲$f_T(t) = \dfrac{c}{t}$，$1 \le t \le 30$，其中c爲一常數

   (1) 求c之值

   (2) 求T的期望值$\mathrm{E}(T)$

   (3) 求$T \ge 10$秒的機率

   Solution:

   (a) 由於機率總和爲1，因此

   $$1 = \int_1^{30} f_T(t)\,dt = \int_1^{30} \frac{c}{t}dt = c\ln t|_1^{30} = c\ln 30$$

   因此$c = \dfrac{1}{\ln 30}$。

   (b) 根據期望值的定義知

   $$\mathrm{E}(T) = \int_1^{30} t f_T(t)\,dt = \int_1^{30} c dt = 29c = \frac{29}{\ln 30}$$

   (c) 根據累積機率的意義可知

   $$P(T \ge 10) = \int_{10}^{30} f_T(t)\,dt = \int_{10}^{30} \frac{c}{t}dt = c\ln t|_{10}^{30} = \frac{\ln 30 - \ln 10}{\ln 30} = \frac{\ln 3}{\ln 30}$$

$\square$

6. 假設X爲一隨機變數，其機率密度函數爲

   $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   其中$\lambda > 0$。令$Y = cX$, $c > 0$。求Y的機率密度函數，$f_Y(y)$。

   Solution: 爲了求Y的機率密度函數$f_Y(y)$，先求Y的累積分配函數$F_Y(y)$。若$y > 0$時有

   $$F_Y(y) = P(Y \ge y) = P\left(X \ge \frac{y}{c}\right) = \int_0^{\frac{y}{c}} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=\frac{y}{c}} = 1 - e^{-\frac{\lambda y}{c}}$$

   因此

   $$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - e^{-\frac{\lambda y}{c}}\right) = \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda y}{c}}$$

   若當$y < 0$時則$f_Y(y) = 0$。因此

   $$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda y}{c}} \quad , & y \ge 0 \\ 0 \quad , & y < 0 \end{cases}$$

$\square$

7. 工廠生產某種繩子，假設每100尺的平均瑕疵數爲200個。每尺的瑕疵數Y遵循著Poisson分佈。設出售每一尺的利潤是$X = 50 - 2Y$。求每售出一尺的平均利潤。

Solution: Poisson分佈的機率密度函數爲$P_Y(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，其中$\lambda$爲平均發生次數。按題意可知$\lambda = 2$，因此$Y$的機率密度函數爲

$$P_Y(k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$$

因此Y的期望值爲

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k) = 2e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2e^{-2} \cdot e^2 = 2$$

藉由$X = 50 - 2Y$，可知

$$\mathrm{E}(X) = 50 - 2\mathrm{E}(Y) = 50 - 2 \cdot 2 = 46$$

□