1002微積分乙期中考試題及詳解

1. 令$f(x,y)=e^{2x^2+y^2}$, $x(u,v)=u\ln v$, $y(u,v)=ve^u$。求$\dfrac{\partial f}{\partial v}$。

   Solution: 利用多變數連鎖律有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\&=\left(4xe^{2x^2+y^2}\right)\frac{u}{v}+\left(2ye^{2x^2+y^2}\right)e^u\\&=e^{2u^2\ln^2 v+v^2e^{2u}}\left(\frac{4u^2\ln v}{v}+2ve^{2u}\right)\end{aligned}$$

□

2. 設$f(x,y)=\left(x^2+1\right)^2y-xy^3$。

   (a) 求$f(x,y)$在點$(1,2)$沿$(2,1)$的方向導數。

   (b) 在點$(1,2)$處，$f(x,y)$沿那一方向的方向導數最大。

   解題訣竅：留意方向導數與梯度之間的關係便能求解。

   Solution:

   (a) 命$\vec{u}=(2,1)$。先求f的梯度有

$$\nabla f(x,y)=\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)=\left(4x\left(x^2+1\right)y-y^3,\left(x^2+1\right)^2-3xy^2\right)$$

   如此f在$(1,2)$沿$\vec{u}$的方向導數爲

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\nabla f(1,2)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(8,-8)\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

   (b) 方向導數最大的方向會與在該點的梯度方向相同，因此$\vec{u}$平行於$\nabla f(1,2)=(8,-8)$，故沿$(1,-1)$有最大的方向導數。

□

3. 求$e^{\left(x^2-y^2\right)}+x\sin z=1$在$(1,1,0)$的切平面方程式。

   解題訣竅：利用梯度可求出法向量，從而利用點法式列出切平面方程式。

   Solution: 設$F(x,y,z)=e^{x^2-y^2}+x\sin z-1$，則$F$的梯度爲

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y,z)&=\left(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)\right)\\&=\left(2xe^{x^2-y^2}+\sin z,-2ye^{x^2-y^2},x\cos z\right)\end{aligned}$$

   故法向量爲$\nabla F(1,1,0)=(2,-2,1)$，從而切平面方程式爲

$$2(x-1)-2(y-1)+(z-0)=0$$

   或寫爲$2x-2y+z=0$。

□

4. 使用Lagrange乘子法求$f(x,y)=x^2y$在$x^2+2y^2=6$限制條件下的最大值與最小值。
Solution: 設拉格朗日乘子函數F如下

$$F(x,y,\lambda)=x^2y-\lambda\left(x^2+2y^2-6\right)$$

據此解下列的聯立方程組

$$\begin{aligned}F_x(x,y,\lambda)=&2xy-2x\lambda=0\\F_y(x,y,\lambda)=&x^2-4y\lambda=0\\F_\lambda(x,y,\lambda)=&-\left(x^2+2y^2-6\right)=0\end{aligned}$$

由第一式可知$x=0$或$\lambda=y$。

- 若$x=0$，代入第三式可知$y=\pm\sqrt{3}$，故座標爲$(x,y)=\left(0,\pm\sqrt{3}\right)$。
- 若$\lambda=y$，則帶入第二式可知$x^2=4y^2$，從而代入第三式可知$6y^2=6$，故$y=\pm1$，而$x=\pm2$。故解得座標爲$(x,y)=(\pm2,1)$或$(x,y)=(\pm2,-1)$

將這些座標代入有

$$\begin{aligned}f\left(0,\sqrt{3}\right)=f\left(0,-\sqrt{3}\right)&=0\\f(2,1)=f(-2,1)&=4\\f(2,-1)=f(-2,-1)&=-4\end{aligned}$$

因此最大值爲4而最小值爲-4。 □

5. 求$f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$的極大值、極小值與鞍點。（假如存在的話）
Solution: 首先找出極值候選點，解下列聯立方程組：

$$\begin{cases}f_x(x,y)=&4x^3-4y=0\\f_y(x,y)=&4y^3-4x=0\end{cases}$$

這兩式可分別得到$x^3=y$與$y^3=x$，代入後有$x^9=x$，從而有

$$x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=0$$

故解得$x=0$或$x=1$或$x=-1$，故有候選點$(0,0)$或$(1,1)$或$(-1,-1)$。

現在利用二階行列式$D(x,y)$來判別這些極值候選點的極值性質。

$$D(x,y)=\begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12x^2&-4\\-4&12y^2\end{vmatrix}=144x^2y^2-16$$

- 由於$D(0,0)=-16<0$，故$(0,0)$爲鞍點；
- 由於$D(1,1)=128>0$且$f_xx(1,1)=12>0$，因此$(1,1)$爲極小點；
- 由於$D(-1,-1)=128>0$且$f_xx(-1,-1)=12>0$，因此$(-1,-1)$爲極小點。

□

6. 求$\int_0^1 \int_x^1 \cos\left(y^2\right) dydx$。

解題訣竅：由於無法直接對y積分，因此改變積分順序求解之。

Solution: 首先改變積分範圍：$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$可改為$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$，從而原本的雙重積分可以改寫並計算如下

$$\int_0^1 \int_0^y \cos\left(y^2\right) dxdy = \int_0^1 x\cos\left(y^2\right)\Big|_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 y\cos\left(y^2\right) dy = \frac{\sin\left(y^2\right)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\sin 1}{2}$$

□

7. 求$\iint_\Omega e^{\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}} dA$，其中$\Omega$：$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$且$y \geq 0$。

解題訣竅：利用極座標變換。

Solution: 令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，故積分範圍為$\begin{cases} 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$且有$dA = rdrd\theta$，因此所求為

$$\begin{aligned}\iint_\Omega e^{\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}} dA &= \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} e^{\frac{r^2}{2}} rdrd\theta \\ &= \left(\int_0^\pi d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}} e^{\frac{r^2}{2}} rdr\right) \\ &= \pi\left(e - e^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

□

8. 利用變數變換計算$\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)^{\frac{3}{2}}(y-x)^2\,dydx$。

Solution: 按被積分函數來考慮，可以令$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$，也可以解得$\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$。據此，原先的積分邊界爲$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 1-x \end{cases}$，可以改寫爲$\begin{cases} v = u \\ v = -u \\ u = 1 \end{cases}$因此重積分可以改寫如下：

$$\int_0^1\int_{-u}^{u} u^{\frac{3}{2}}v^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu$$

其中Jacobian行列式可以計算如下：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

故所求的重積分可以計算如下：

$$\int_0^1\int_{-u}^{u} u^{\frac{3}{2}}v^2\cdot\frac{1}{2}dvdu = \frac{1}{6}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}v^3\Big|_{-u}^{u}du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{\frac{9}{2}}du = \frac{2}{33}u^{\frac{11}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{33}$$

□