992微積分乙期末考試題及詳解

1. 解微分方程$y = y(t)$滿足$y' = y(1-y),\ y(0) = \frac{1}{2}$。
解題訣竅：利用分離變數法求解。
Solution: 移項有
$$\frac{dy}{y(1-y)} = dt$$
同取定積分，其積分範圍爲0到t，從而有
$$\int_0^t \frac{dy}{y(1-y)} = t$$
即
$$\int_0^t \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}\right) dy = t$$
因此
$$[-\ln(1-y) + \ln y]|_0^t = t$$
利用$y(0) = \frac{1}{2}$，故有
$$\ln \frac{y}{1-y} = t$$
因此可以解得
$$y(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$
□

2. 解微分方程$x\frac{dy}{dx} = y + x^2 \sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$。
解題訣竅：利用積分因子法。
Solution: 兩邊同除以x後有
$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \sin x$$
由此可知積分因子$\mu = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = x^{-1}$，因此同乘以$\mu$可得
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \sin x$$
因此同取定積分，其積分範圍爲$\frac{\pi}{2}$到x可得$\frac{y}{x} - 1 = -\cos x$，即有
$$y = x - x\cos x$$
□

3. 令$g(x,y)=P(X=x,Y=y)$, X取值1或2, Y取值1或2或3。若已知

$$\begin{aligned}
g(1,1)=\frac{2}{11},\quad g(1,2)=\frac{3}{11},g(1,3)=\frac{1}{11},\\
g(2,1)=\frac{1}{11},\quad g(2,2)=\frac{3}{11},g(2,3)=\frac{1}{11},
\end{aligned}$$

求

(a) $\mathrm{E}(X)$,

(b) $\mathrm{Var}(X)$。

Solution:

(a) 根據期望值的定義，可以計算如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X)=&1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)\\
=&1\cdot[g(1,1)+g(1,2)+g(1,3)]+2\cdot[g(2,1)+g(2,2)+g(2,3)]\\
=&1\cdot\frac{6}{11}+2\cdot\frac{5}{11}\\
=&\frac{16}{11}
\end{aligned}$$

(b) 根據變異數的定義有

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{26}{11}-\left(\frac{16}{11}\right)^2=\frac{30}{121}$$

其中$\mathrm{E}(X^2)$可以計算如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right)=&1^2\cdot P(X=1)+2^2\cdot P(X=2)\\
=&1\cdot\frac{6}{11}+4\cdot\frac{5}{11}\\
=&\frac{26}{11}
\end{aligned}$$

□

4. 若X_1, X_2爲白努利單次試驗，X_1、X_2取值1的機率爲$\dfrac{2}{5}$，X_1、X_2取值0的機率爲$\dfrac{3}{5}$且X_1, X_2獨立。令$Y = X_1 + X_2$, $Z = X_1 - X_2$，求

(a) $P(Y=1)$, $P(Z=1)$及$P(Y=1, Z=1)$之值。
(b) 試說明Y與Z是否獨立。

Solution:

(a) 根據機率的意義、X_1與X_2獨立計算如下：

$$
\begin{aligned}
P(Y=1) =& P(X_1 + X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1) P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) P(X_2 = 1) \\
=& \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \\
=& \frac{12}{25} \\
P(Z=1) =& P(X_1 - X_2 = 1) \\
=& P(X_1 = 1, X_2 = 0) \\
=& P(X_1 = 1) P(X_2 = 0) \\
=& \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \\
=& \frac{6}{25} \\
P(Y=1, Z=1) =& P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{6}{25}
\end{aligned}
$$

(b) 由於

$$
P(Y=1) P(Z=1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{6}{25} = \frac{72}{625} \neq \frac{6}{25} = P(Y=1, Z=1)
$$

因此Y與Z不獨立。

□

5. 設$f_X(x) = \dfrac{2x}{k^2}, 0 \le x \le k$，是$X$的機率密度函數；$X$取值在$[0, k]$。

(a) 求$\mathrm{E}(X)$（以k表示）。

(b) 求$\mathrm{Var}(X)$（以k表示）。

(c) 若$\mathrm{Var}(X) = 2$，求k之值。

Solution:

(a) 根據期望值的定義可以計算如下

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^k x f_X(x)\,dx = \int_0^k \frac{2x^2}{k^2} dx = \left.\frac{2x^3}{3k^2}\right|_0^k = \frac{2k}{3}$$

(b) 根據變異數的定義計算如下

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{k^2}{2} - \left(\frac{2k}{3}\right)^2 = \frac{k^2}{18}$$

其中$\mathrm{E}(X^2)$計算如下

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_0^k x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^k \frac{2x^3}{k^2} dx = \left.\frac{x^4}{2k^2}\right|_0^k = \frac{k^2}{2}$$

(c) 由(b)有$\dfrac{k^2}{18} = 2$，因此解得$k = \pm 6$。但$k = -6$不符合題目假設，因此$k = 6$。

□

6. 設X, Y爲獨立之隨機變數且其機率密度函數爲

$$f_X(x) = \begin{cases} 2^{-1}x^2e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

若$Z = X + Y$，求$f_Z(z)$。

Solution: 根據課本定理能知道所求可以表示並計算如下：

當$z > 0$時有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \\ &= \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{2}x^2e^{-x}e^{-(z-x)}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{-z}\int_0^z x^2dx \\ &= \frac{z^3e^{-z}}{6} \end{aligned}$$

而若$z < 0$時其機率密度之值爲0，因此

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^3e^{-z}}{6}, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

□

7. 一本300頁的書有15個錯誤且其分佈近似一個Poisson過程。求

(a) 100頁中恰有5個錯誤之機率。

(b) 10頁中至少有1個錯誤之機率。

Solution: 根據Poisson機率分配有

$$P(k, \lambda, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$$

其中λ是平均每頁發生的錯誤數量，T代表要考察的頁數，k代表發生錯誤的個數，而所求則是依據發生錯誤的個數與頁數所對應的機率。按題意$\lambda = \frac{15}{300}$。

(a) 根據題意代入$T = 100$、$k = 5$，如此有

$$P\left(5, \frac{15}{300}, 100\right) = \frac{5^5}{5!}e^{-5} = \frac{625}{24}e^{-5}$$

(b) 欲求至少發生一個錯誤之機率，我們可以考慮沒有發生任何錯誤的機率之反面，即

$$1 - P\left(0, \frac{15}{300}, 10\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!}e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

□