992微積分乙期中考試題及詳解

1. 設$f(x,y)=x^3+\frac{9}{2}xy+\frac{23}{8}y^2$。

   (a) 求$\nabla f(1,2)$。

   (b) 求在點$(1,2)$的方向導數之最大值。

   解題訣竅：根據梯度的定義與方向導數的特性。
   Solution:

   (a) 根據梯度的定義有

   $$\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=\left(3x^2+\frac{9}{2}y,\frac{9}{2}x+\frac{23}{4}y\right)$$

   取$(x,y)=(1,2)$代入後有

   $$\nabla f(1,2)=(12,16)$$

   (b) 在$(1,2)$求f沿單位方向$\vec{u}$的方向導數時有

   $$D_{\vec{u}}f(1,2)=\nabla f(1,2)\cdot\vec{u}$$

   因此由柯西不等式可知

   $$|D_{\vec{u}}f(1,2)|\leq|\nabla f(1,2)|=\sqrt{12^2+16^2}=20$$

   □

2. 求$x+y^2+z^3-4x^2yz+1=0$在點$(1,1,1)$處之切平面方程式。
   解題訣竅：利用梯度求出法向量後使用點法式列出切平面方程式。
   Solution: 設$F(x,y,z)=x+y^2+z^3-4x^2yz+1$，則$F$的梯度爲

   $$\nabla F(x,y,z)=\left(1-8xyz,2y-4x^2z,3z^2-4x^2y\right)$$

   在$(1,1,1)$處的切平面法向量爲

   $$\nabla F(1,1,1)=(-7,-2,-1)$$

   因此切平面方程式爲

   $$-7(x-1)-2(y-1)-(z-1)=0$$

   或寫爲$7x+2y+z=10$。

   □

3. 令$f\left(x,y\right)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}xy$。

(a) 求f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}。

(b) 求$f\left(x,y\right)$之極值。

Solution:

(a) 直接計算有

$$\begin{aligned}
f_x =& e^{-\left(x^2+y^2\right)}xy\cdot(-2x)+e^{-\left(x^2+y^2\right)}y=\left(1-2x^2\right)ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\\
f_y =& e^{-\left(x^2+y^2\right)}xy\cdot(-2y)+e^{-\left(x^2+y^2\right)}x=\left(1-2y^2\right)xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\\
f_{xx} =& -4xye^{-\left(x^2+y^2\right)}+\left(1-2x^2\right)ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\cdot(-2x)\\
=& 2xy\left(2x^2-3\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}\\
f_{yy} =& -4xye^{-\left(x^2+y^2\right)}+\left(1-2y^2\right)xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\cdot(-2y)\\
=& 2xy\left(2y^2-3\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}\\
f_{xy} =& \left(1-2x^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}+\left(1-2x^2\right)ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\cdot(-2y)\\
=& (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}$$

(b) 爲了找出f的極值，我們解聯立方程組：

$$\begin{cases}
f_x\left(x,y\right)=\left(1-2x^2\right)ye^{-\left(x^2+y^2\right)}=0\\
f_y\left(x,y\right)=\left(1-2y^2\right)xe^{-\left(x^2+y^2\right)}=0
\end{cases}$$

由第一式可知$y=0$或$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

- 若$y=0$則代入第二式可知$x=0$。
- 若$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$則代入第二式可知$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

因此極值候選點爲$(0,0)$、$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

用二階判別式$D\left(x,y\right)$來判斷之：

$$\begin{aligned}
D\left(x,y\right)=&\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}\\
=& f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\\
=& 4x^2y^2\left(2x^2-3\right)\left(2y^2-3\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}-\left(1-2x^2\right)^2\left(1-2y^2\right)^2e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\\
=& \left[4x^2y^2\left(2x^2-3\right)\left(2y^2-3\right)-\left(2x^2-1\right)^2\left(2y^2-1\right)^2\right]e^{-2\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}$$

- 由於$D\left(0,0\right)=-1<0$，因此$(0,0)$爲鞍點。

- 由於$D\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=9e^{-2}>0$，

   i. 且有$f_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f_{xx}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-e^{-1}<0$，
   因此$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$爲極大點。

   ii. 且有$f_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f_{xx}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-1}>0$，
   因此$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$爲極小點。

因此極大值爲$\frac{e^{-1}}{2}$，而極小值爲$-\frac{e^{-1}}{2}$。

□

4. 求點$(0,0)$到$17x^2+12xy+8y^2=100$的最長和最短距離。
Solution: 設P爲$17x^2+12xy+8y^2=100$上的座標，而P至$(0,0)$的距離平方函數爲$f(x,y)=x^2+y^2$，題目要求考慮限制在$17x^2+12xy+8y^2=100$上的最大與最小值。據此使用拉格朗日乘子法。設拉格朗日乘子函數如下：

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda\left(17x^2+12xy+8y^2-100\right)$$

如此解下列的聯立方程組

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda(34x+12y)=0\\ F_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda(12x+16y)=0\\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-\left(17x^2+12xy+8y^2-100\right)=0\end{cases}$$

若$\lambda=0$，則由第一式與第二式可知$x=y=0$，但這與第三式不合，故$\lambda\neq 0$。如此由第一式與第二式可知

$$\begin{cases}(17\lambda-1)x+6\lambda y=0\\ 6\lambda x+(8\lambda-1)y=0\end{cases}$$

但這個方程組存在非$(0,0)$的解，因此其二階行列式爲0，即

$$\begin{vmatrix}17\lambda-1 & 6\lambda\\ 6\lambda & 8\lambda-1\end{vmatrix}=100\lambda^2-25\lambda+1=0$$

可解得$\lambda=\frac{1}{5}$或$\lambda=\frac{1}{20}$。

- 當$\lambda=\frac{1}{5}$時可有$y=-2x$，代入限制條件可得$25x^2=100$，即有$x=\pm 2$，故解得座標爲$(x,y)=(2,-4)$或$(x,y)=(-2,4)$。

- 當$\lambda=\dfrac{1}{20}$時可有$x=2y$，代入限制條件可得$100y^2=100$，即有$y=\pm1$，故解得$(x,y)=(2,1)$或$(x,y)=(-2,-1)$。

因此最長的距離爲$\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$；而最短的距離爲$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$。 □

5. 計算$\displaystyle\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=1}\frac{e^{x^2}}{x}dxdy$。
解題訣竅：由於無法直接對x積分，因此更換積分順序計算之。
Solution: 首先改變積分區域

$$\begin{cases}\sqrt{y}\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$$

從而所求的重積分可以改寫爲

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=1}\frac{e^{x^2}}{x}dxdy&=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x^2}\frac{e^{x^2}}{x}dydx\\&=\int_0^1\left.\frac{ye^{x^2}}{x}\right|_{y=0}^{y=x^2}dx\\&=\int_0^1 xe^{x^2}dx\\&=\left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1\\&=\frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

□

6. 利用極座標求$\iint_{\Omega} x^2 y dA$，其中$\Omega=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}, y\geq 0\right\}$。

Solution: 利用極座標變換，令$\begin{cases} x=&r\cos\theta \\ y=&r\sin\theta \end{cases}$，其變數範圍爲$\begin{cases} 0\leq &r\leq\cos\theta \\ 0\leq &\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$，且$dA=rdrd\theta$，故所求的重積分可以改寫並計算如下

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} x^2 y dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}(r\cos\theta)^2 r\sin\theta r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^4\cos^2\theta\sin\theta dr d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos^2\theta\sin\theta\Big|_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\sin\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{40}\cos^8\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

□

7. 利用變數變換$u=\frac{y}{x^2}$、$v=\frac{x}{y^2}$，計算$\iint_R \frac{1}{x^2y^2}dA$，其中$R$爲$y=x^2$，$y=2x^2$，$x=3y^2$及$x=y^2$所圍成的區域。

Solution: 根據變數變換可知邊界可分別改爲$u=1$、$u=2$、$v=1$、$v=3$，且被積分函數爲$\frac{1}{x^2y^2}=u^2v^2$，而變數變換的Jacobian行列式計算如下：

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix}^{-1}=\frac{x^2y^2}{3}=\frac{1}{3u^2v^2}$$

因此所求的重積分可以改寫並計算如下：

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{1}{x^2y^2}dA &= \int_1^3\int_1^2 u^2v^2\cdot\frac{1}{3u^2v^2}dudv \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

8. 計算三重積分$\iiint_\Omega ydV$，其中Ω爲$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+2z=1$所圍成的區域。

Solution: 可以注意到Ω可以表達爲$\begin{cases} 0 \le x \le 1-y \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le \dfrac{1-x-y}{2} \end{cases}$，故所求爲

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega ydV &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{\frac{1-x-y}{2}} ydzdxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{1-x-y}{2} ydxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-y} \left(y - xy - y^2\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(xy - \frac{x^2 y}{2} - xy^2\right)\Big|_0^{1-y} dy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(y - 2y^2 + y^3\right) dy \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

□