981微積分乙期末考試題及詳解

1. 設$f(x)=\int_{x}^{\sin x}\frac{dt}{1+t^7}$，求$f'(x)$。（提示：不要算$\int\frac{dt}{1+t^7}$。）

   Solution: 設$g(x)=\int_{0}^{x}\frac{dt}{1+t^7}$，則

$$f(x)=g(\sin x)-g(x)$$

運用連鎖律可得

$$\begin{aligned}f'(x)=&g'(\sin x)\cos x-g'(x)\\=&\frac{\cos x}{1+\sin^7 x}-\frac{1}{1+x^7}\end{aligned}$$

□

2. 求$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}x\sec^2 x dx$。

   Solution: 利用分部積分法可得

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}x\sec^2 xdx=&\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}xd\tan x\\=&x\tan x|_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\tan xdx\\=&\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}d\cos x\\=&\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\ln(\cos x)|_{0}^{\frac{\pi}{3}}\\=&\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\ln 2\end{aligned}$$

□

3. 求$\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^3}dx$。

   Solution: 利用部份分式，可寫爲

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

藉由兩邊同乘以$(x+1)(x-1)^3$可得

$$\begin{aligned}x^2+1=&A(x-1)^3+B(x+1)(x-1)^2+C(x+1)(x-1)+D(x+1)\\=&(A+B)x^3+(-3A-B+C)x^2+(3A-B+D)+(-A+B-C+D)\end{aligned}$$

透過比較係數可得

$$\begin{aligned}A+B=&0\\-3A-B+C=&1\\3A-B+D=&0\\-A+B-C+D=&1\end{aligned}$$

如此能解得$A=-\frac{1}{4}$、$B=\frac{1}{4}$、$C=\frac{1}{2}$、$D=1$。因此所求的積分爲

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^3}dx&=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{(x-1)^3}\\&=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C\end{aligned}$$

□

4. 求$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+2}$。

Solution: 令$u=e^x$，則$du=e^x dx$，由此可知

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+2}=\int\frac{du}{u^2+2u+2}=\int\frac{du}{(u+1)^2+1}=\tan^{-1}(u+1)+C=\tan^{-1}(e^x+1)+C$$

其中C爲積分常數。 □

5. 由$y=x^2+1$及$y=x+1$所包圍之區域，繞y軸旋轉。求所得旋轉體之體積。

Solution: 透過解交點可知在$x=0$與$x=1$處會相交，因此透過旋轉體的體積公式可知

$$\begin{aligned}V=&\int_0^1 2\pi x\left[(x+1)-\left(x^2+1\right)\right]dx\\=&2\pi\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx\\=&2\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\\=&\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

□

6. 介於$y=\sec x$，$y=\tan x$之間，由$x=0$到$x=\frac{\pi}{4}$之區域，繞x軸旋轉。求所得旋轉體之體積。

Solution: 利用旋轉體體積公式可得

$$\begin{aligned}V=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi\left[\sec^2 x-\tan^2 x\right]dx\\=&\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx\\=&\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

□

7. 求$f\left(x\right)=\sqrt{1-x}$在$x=0$之泰勒展式，寫出一般項。
Solution: 使用二項式展開可得

$$f\left(x\right)=\left(1-x\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k}^{\frac{1}{2}}\left(-x\right)^{k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k}C_{k}^{\frac{1}{2}}x^{k}$$

其中$C_{k}^{\frac{1}{2}}$可以表達如下：

$$\begin{aligned}C_{k}^{\frac{1}{2}}&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-k\right)}{k!}\\&=\left(-1\right)^{k-1}\frac{1\cdot3\cdots\left(2k-3\right)}{2^{k}k!}\\&=\left(-1\right)^{k-1}\frac{\left(2k-2\right)!}{2^{2k-1}k!\left(k-1\right)!}\end{aligned}$$

因此$\sqrt{1-x}$在$x=0$的泰勒展開式爲

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2k-2\right)!}{2^{2k-1}k!\left(k-1\right)!}x^{k}$$

□

8. 求$f\left(x\right)=\tan^{-1}x$在$x=0$之泰勒展式，寫出一般項。並求出$f^{(19)}\left(0\right)$及$f^{(20)}\left(0\right)$。
Solution: 直接計算有

$$\tan^{-1}x=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}dt=\int_{0}^{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-t^{2}\right)^{k}dt=\int_{0}^{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

而$f^{(19)}\left(0\right)$爲第十九項的係數乘以$19!$；$f^{(20)}\left(0\right)$爲第二十項的係數乘以$20!$，故$f^{(19)}\left(0\right)=\frac{\left(-1\right)^{9}\cdot19!}{19}=-18!$、$f^{(20)}\left(0\right)=0\cdot20!=0$。 □

9. 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{7^{x}-1}{2^{x}-1}$。
Solution: 利用羅必達法則可得

$$\lim_{x\to0}\frac{7^{x}-1}{2^{x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{7^{x}\ln7}{2^{x}\ln2}=\frac{\ln7}{\ln2}$$

□

10. 求曲面$z=e^{-xy}+y$在點$(0,1,2)$之切平面方程式。
Solution: 設$F\left(x,y,z\right)=e^{-xy}+y-z$，計算其梯度有

$$\nabla F\left(x,y,z\right)=\left(-ye^{-xy},-xe^{-xy}+1,-1\right)$$

取$(x,y,z)=(0,1,2)$則有$\nabla F\left(0,1,2\right)=\left(-1,1,-1\right)$，如此利用點法可得

$$-\left(x-0\right)+\left(y-1\right)-\left(z-2\right)=0$$

或寫爲$x-y+z=1$。 □