982微積分乙期末考試題及詳解

1. (有移民的人口模型) 令ρ爲移民率 (移民數/單位時間)爲一常數。設$P(t)$表示在時間t之人口總數，滿足$P(t_0) = P_0$及$P'(t) = \lambda P(t) + \rho$，其中$\lambda > 0$爲常數。求$P(t)$的一般式。
   解題訣竅：利用積分因子法。
   Solution: 移項有
   $$P'(t) - \lambda P(t) = \rho$$
   由於積分因子爲$\mu = e^{-\int \lambda dt} = e^{-\lambda t}$，因此兩邊同乘以$e^{-\lambda t}$則有
   $$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t} P(t)\right) = e^{-\lambda t} P'(t) - \lambda e^{-\lambda t} P(t) = \rho e^{-\lambda t}$$
   兩邊同取定積分，積分範圍自t_0至t，可得
   $$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left(e^{-\lambda s} P(s)\right) ds = \int_{t_0}^{t} \rho e^{-\lambda s} ds$$
   如此有
   $$e^{-\lambda t} P(t) - e^{-\lambda t_0} P_0 = -\frac{\rho}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t_0}\right)$$
   因此解得
   $$P(t) = \left(P_0 + \frac{\rho}{\lambda}\right) e^{\lambda(t-t_0)} - \frac{\rho}{\lambda}$$
   □

2. 解微分方程$\frac{dy}{dt} = 2ty + 4t$，$y(0) = 1$。
   解題訣竅：利用積分因子法。
   Solution: 移項後有
   $$\frac{dy}{dt} - 2ty = 4t$$
   由此可知積分因子爲$\mu = e^{-\int 2t dt} = e^{-t^2}$，因此兩邊同乘以$e^{-t^2}$則有
   $$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} y\right) = e^{-t^2} \frac{dy}{dt} - 2te^{-t^2} y = 4te^{-t^2}$$
   兩邊同取定積分，積分範圍自0至t可得
   $$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-s^2} y\right) ds = \int_0^t 4se^{-s^2} ds$$
   如此有
   $$e^{-t^2} y - 1 = -2e^{-t^2} + 2$$
   因此解得
   $$y = -2 + 3e^{t^2}$$
   □

3. 解微分方程$\frac{dy}{dt}=(y-1)(y-2)$, $y(0)=0$。
解題訣竅：分離變數法。
Solution: 移項整理有

$$\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{2-y}\right)dy=\frac{dy}{(y-1)(y-2)}=dt$$

同取定積分，積分範圍自0至t可得

$$\int_0^t\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{2-y}\right)dy=\int_0^t ds$$

如此有

$$-\ln(1-y)+\ln(2-y)-\ln 2=t$$

即有

$$\ln\frac{2-y}{1-y}=t+\ln 2$$

取指數則有

$$\frac{2-y}{1-y}=2e^t$$

據此可以解出y如下

$$y(t)=\frac{2e^t-2}{2e^t-1}$$

□

4. 令V為一隨機變數。而$V=k$, $k\geq 2$, 表示在連續進行白努利試驗時，到第k次才出現兩次+事件。計算$P(V=k)$。（設p為一次白努利試驗出現+之機率，而$q=1-p$。）
Solution: 由於要到第k次才出現兩次正面事件，這表示在第k次必須為正面，而在前面$k-1$則僅出現一次正面，其餘皆為反面。由此我們可知其機率$P(V=k)$為$p\cdot C_1^{k-1}pq^{k-2}=(k-1)p^2q^{k-2}$。 □

5. 設X,Y為隨機變數取值1或2。已知

$$P(X=1,Y=1)=\frac{4}{19},P(X=1,Y=2)=\frac{2}{19},$$
$$P(X=2,Y=1)=\frac{7}{19},P(X=2,Y=2)=\frac{6}{19}$$

求$P(X=1)$, $P(X=2)$, $\mathrm{E}(X)$及$\mathrm{Var}(X)$。
Solution: 按機率的意義可以計算如下

$$\begin{aligned}P(X=1)=&P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{4}{19}+\frac{2}{19}=\frac{6}{19}\\P(X=2)=&P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)=\frac{7}{19}+\frac{6}{19}=\frac{13}{19}\end{aligned}$$

按期望的定義有

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=1\cdot\frac{6}{19}+2\cdot\frac{13}{19}=\frac{32}{19}$$

根據變異數的定義有

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{58}{19}-\left(\frac{32}{19}\right)^2=\frac{78}{361}$$

其中$\mathrm{E}(X^2)$計算如下

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=1^2\cdot P(X=1)+2^2\cdot P(X=2)=1\cdot\frac{6}{19}+4\cdot\frac{13}{19}=\frac{58}{19}$$

□

6. 設隨機變數X之機率密度函數爲

$$f(t)=\begin{cases}ct(1-t) & \text{若}0\le t\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中c爲常數。求c之值，再求$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$。
Solution: 根據機率的定義可知

$$1=\int_0^1 f(t)\,dt=c\int_0^1\left(t-t^2\right)dt=c\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{c}{6}$$

因此$c=6$。

根據期望值的定義有

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 tf(t)\,dt=6\int_0^1\left(t^2-t^3\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

根據變異數的定義有

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20}$$

其中$\mathrm{E}(X^2)$計算如下

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=\int_0^1 t^2f(t)\,dt=6\int_0^1\left(t^3-t^4\right)dt=6\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$

□

7. 若X, Y爲獨立之隨機變數並且有指數型機率密度函數

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_Y(t) \text{ 對} t \geq 0, \text{而} f_X(t) = 0 = f_Y(t) \text{ 對} t < 0$$

求$Z = X + Y$之機率密度函數$f_Z(t)$及$\mathrm{E}(Z)$, $\mathrm{Var}(Z)$。

Solution: 根據課本的定理，當$t > 0$時有

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx = \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x)\, dx = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t} dx = \lambda^2 e^{-\lambda t} t$$

而當$z < 0$時則$f_Z(t) = 0$。因此Z的機率密度函數爲

$$f_Z(t) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda t} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

根據期望值的特性，可知

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) =& \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \\ =& 2\int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \\ =& -2\int_0^{\infty} t de^{-\lambda t} \\ =& -2te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ =& -\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} \\ =& \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

根據變異數的定義可知

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}\left(Z^2\right) - (\mathrm{E}(Z))^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

其中$\mathrm{E}(Z^2)$計算如下

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Z^2\right) =& \int_0^{\infty} \lambda^2 t^3 e^{-\lambda t} dt \\ =& -\lambda \int_0^{\infty} t^3 de^{-\lambda t} \\ =& +3\lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt \\ =& 6\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt \\ =& \frac{6}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ =& \frac{6}{\lambda^2} \end{aligned}$$

□

8. 某公司之電話通數平均每小時30通。求在6分鐘內至少有兩通電話之機率。（假設此隨機現象遵守Poisson過程。）

Solution: Poisson機率分配如下

$$P(k,\lambda,T)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$$

其中λ為平均每分鐘的電話通數，T為給定的時間長度，k為電話通數，而其機率則在求給定時間內得到給定通數之機率。按題意有$\lambda=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$，$T=6$。而欲求至少兩通之機率，則可考慮若未滿兩通之機率後以1去減去之：

$$\begin{aligned}\text{所求}=&1-\left[P\left(0,\frac{1}{2},6\right)+P\left(1,\frac{1}{2},6\right)\right]\\=&1-\left[\frac{3^0}{0!}e^{-3}+\frac{3^1}{1!}e^{-3}\right]\\=&1-4e^{-3}\end{aligned}$$

□