982微積分乙期中考試題及詳解

1. 設$f(x,y)=2x^2-3xy-2y^2$。
   (a) 求$f(x,y)$在點$(1,2)$處沿$(3,4)$方向之方向導數。
   (b) 在點$(1,2)$處$f(x,y)$沿哪一方向，方向導數最大？

   解題訣竅：根據方向導數的特性求解。
   Solution:

   (a) 先求f的梯度如下：

   $$\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(4x-3y,-3x-4y)$$

   命$\vec{u}=(3,4)$，則f在$(1,2)$處沿$\vec{u}$的方向導數爲

   $$D_{\vec{u}}f(1,2)=\nabla f(1,2)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-2,-11)\cdot\frac{(3,4)}{5}=-10$$

   (b) 根據柯西不等式的等號成立條件可知，最大的方向導數發生在與梯度相同的方向上，故其方向爲$\vec{u}=(-2,-11)$。

   □

2. 求曲面$\ln(1+x^2-y^2)+\sin^2 z=0$在點$(1,1,0)$處之切面方程。
   解題訣竅：利用梯度求處切平面的法向量後，運用點法式列出切平面方程式。
   Solution: 設$F(x,y,z)=\ln(1+x^2-y^2)+\sin^2 z$，則$F$的梯度爲

   $$\begin{aligned}\nabla F(x,y,z)&=(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z))\\&=\left(\frac{2x}{1+x^2-y^2},\frac{-2y}{1+x^2-y^2},2\sin z\cos z\right)\end{aligned}$$

   因此切平面在$(1,1,0)$處的法向量爲$\nabla F(1,1,0)=(2,-2,0)$，因此切平面方程式爲

   $$2(x-1)-2(y-1)+0(z-0)=0$$

   或寫爲$x-y=0$。 □

3. 求函數$f(x,y)=x^2+xy-y^2-2x+y+5$之候選點。並決定其是否爲極大、極小或鞍點。

Solution: 先求其候選點，我們應解下列的聯立方程組：

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x+y-2=0 \\ f_y(x,y) = x-2y+1=0 \end{cases}$$

可得$(x,y)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$。

現在利用二階判別式$D(x,y)$判斷之，其中$D(x,y)$計算如下：

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

因此$D\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=-5<0$，故$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$爲鞍點。 □

4. 用Lagrange乘子法求$f(x,y)=x^2+xy+y^2$在$x^2+y^2=1$上之最大值及最小值。

Solution: 設拉格朗日乘子函數如下

$$F(x,y,\lambda)=x^2+xy+y^2-\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

據此解下列聯立方程組

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2x+y-2x\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda) = x+2y-2y\lambda=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = -\left(x^2+y^2-1\right)=0 \end{cases}$$

將前兩式相加可得$3x+3y-2\lambda(x+y)=0$，即$(x+y)(3-2\lambda)=0$。

- 若$x+y=0$，則代入第三式可解得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故得座標爲$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。
- 若$\lambda=\frac{3}{2}$，則代入第一式可得$x=y$，據此代入第三式可解得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故得座標爲$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

代入後判斷可知

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}\text{爲最大值}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\text{爲最小值}$$

□

5. 求曲線$r=1+\sin\theta$所圍之面積。

Solution: 設R為曲線$r=1+\sin\theta$所包圍的區域面積，利用極座標變換可計算如下

$$\begin{aligned}
A=\iint_R dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{1+\sin\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin\theta)^2\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\sin\theta+\sin^2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}+\sin\theta-\frac{\cos 2\theta}{4}\right) d\theta \\
&= \left.\frac{3\theta}{4}-\cos\theta-\frac{\sin 4\theta}{8}\right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

6. 求$\displaystyle\int_0^1\int_x^1 y^2e^{xy}\,dy\,dx$之值。

解題訣竅：由於無法直接對y積分，因此應改變積分順序求解之。

Solution: 先改變其積分範圍

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

據此所求的重積分可以改寫如下

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_x^1 y^2e^{xy}\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^y y^2e^{xy}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left. ye^{xy}\right|_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1 \left(ye^{y^2}-y\right) dy \\
&= \left.\frac{e^{y^2}-y^2}{2}\right|_0^1 \\
&= \frac{e-2}{2}
\end{aligned}$$

□

7. 計算$\iint_\Omega\left(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{2y}{x}}\right)dA$，其中$\Omega$爲$xy=1,\ xy=9,\ y=x,\ y=2x$所圍成，而在$x>0,\ y>0$部分之區域。

解題訣竅：透過被積分函數與積分區域可發現運用變數變換可使積分區域與被積分函數變簡單。

Solution: 令$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$，其積分邊界可改寫爲$u=1$、$u=9$、$v=1$、$v=2$；且變數變換產生的Jacobian行列式計算如下

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}$$

因此所求的重積分可以改寫並計算如下

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega\left(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{2y}{x}}\right)dA &= \int_1^2\int_1^9\left(\sqrt{u}+\sqrt{2v}\right)\cdot\frac{1}{2v}dudv \\
&= \int_1^2\left(\frac{1}{3v}u^{\frac{3}{2}}+\frac{u}{\sqrt{2v}}\right)\Bigg|_1^9 dv \\
&= \int_1^2\left(\frac{26}{3v}+4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}}\right)dv \\
&= \left(\frac{26}{3}\ln v+8\sqrt{2v}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{26}{3}\ln 2+16-8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

8. 計算$\iiint_\Omega xdV$，其中Ω爲$x=0,\ y=0,\ z=0$及$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$所圍成之區域。

Solution: 可以留意到Ω可以表達爲$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2-2x \\ 0 \leq z \leq 3-3x-\dfrac{3y}{2} \end{cases}$，如此所求的三重積分可以改寫並計算如下

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega xdV &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3y}{2}} xdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(3-3x-\frac{3y}{2}\right) xdydx \\
&= \int_0^1 \left(3xy-3x^2y-\frac{3xy^2}{4}\right)\Big|_0^{2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(3x-6x^2+3x^3\right) dx \\
&= \left(\frac{3}{2}x^2-2x^3+\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$\square$